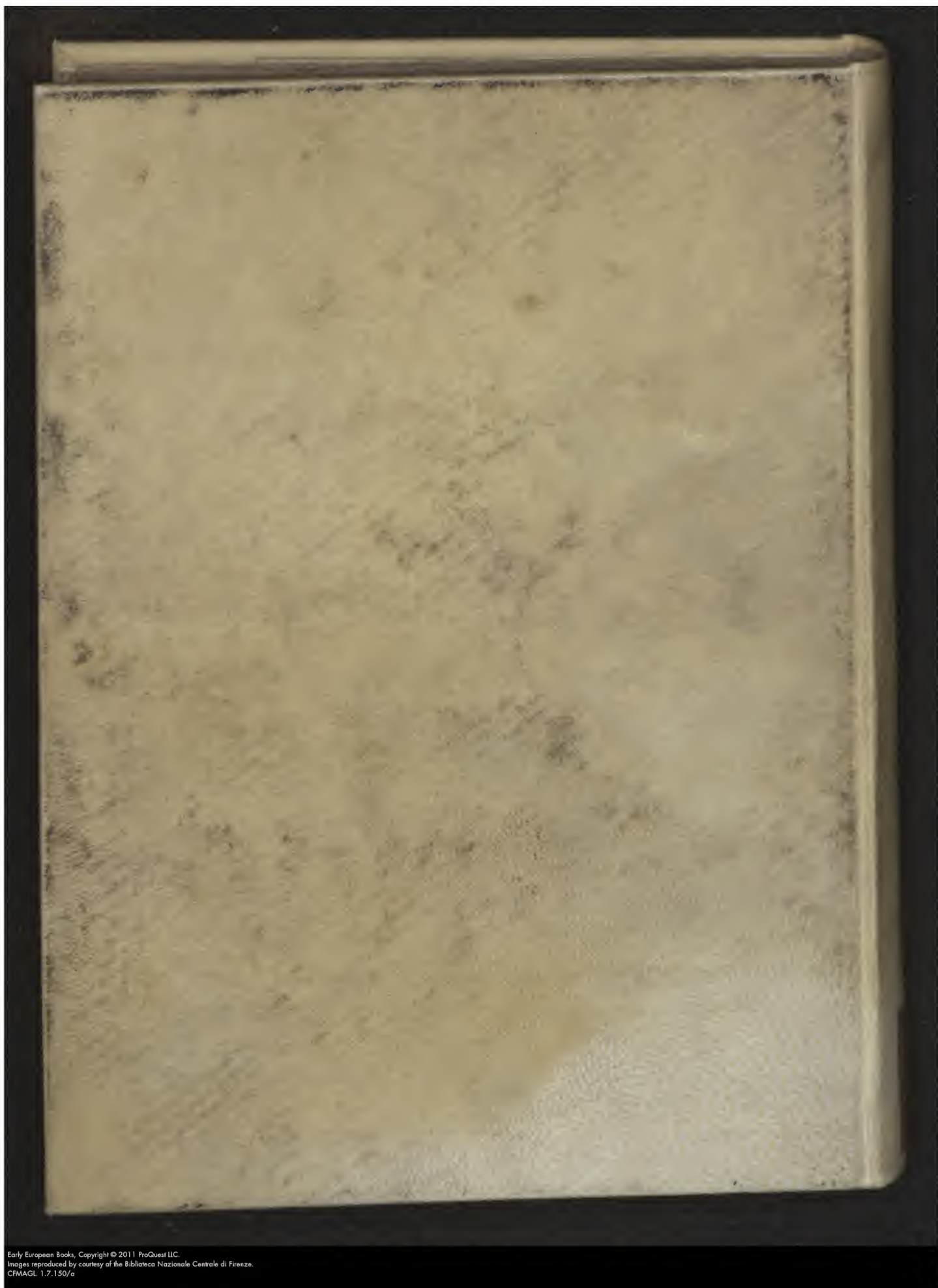




Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a

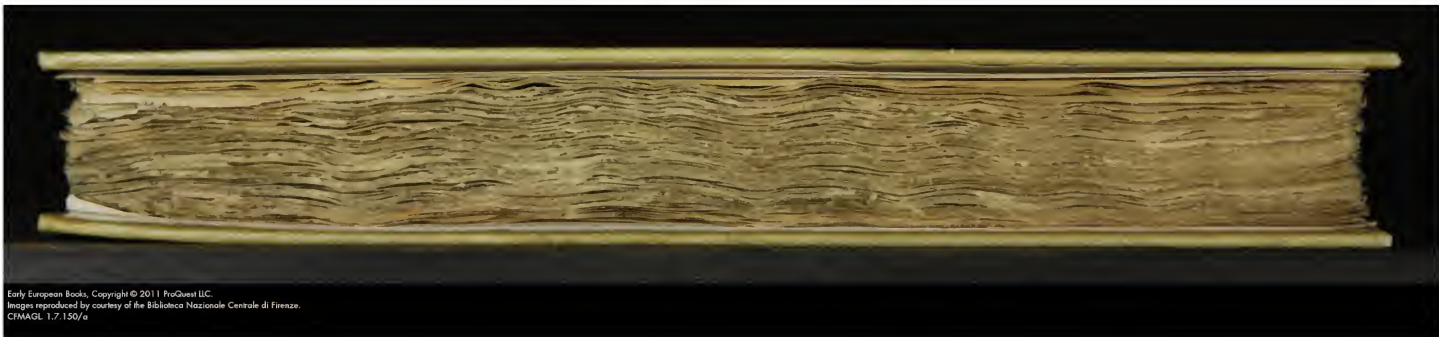




Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.150/a



Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CIMA GL 1.7.150/a

152

EXERCITATIONES GEOMETRICÆ:

A
JACOBO GREGORIO, Scoto,
è R. Societate.

	Pag.
<i>Appendicula ad veram Circuli & Hyperbolæ Quadraturam.</i>	1
<i>N. Mercatoris Quadratura Hyperbolæ Geometricè demonstrata.</i>	9
<i>Analogia inter Lineam Meridianam Planisphærii Nautici & Tangentes Artificiales Geometricè demonstrata; seu, quod Secantium Naturalium additio efficiat Tangentes Artificiales.</i>	14
<i>Item, Quòd Tangentium Naturalium additio efficiat Secantes Artificiales.</i>	21
<i>Quadratura Conchoidis.</i>	23
<i>Quadratura Cissoidis.</i>	24
<i>Methodus Facilis & accurata componendi Secantes & Tangentes Artificiales.</i>	25

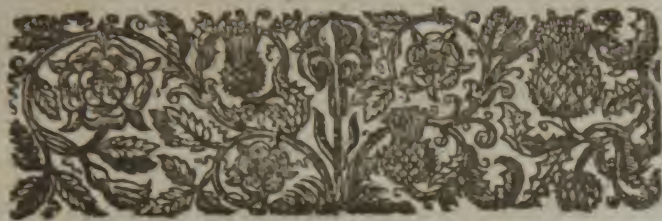
L O N D I N I,

Typis Gulielmi Godbid, & Impensis Mosis Pitt Bibliopolæ,
in vico vulgò vocato Little Britain.
Anno M. DC. LXVIII.

EXPOSITIO
GEOMETRICA

A
JACOBO GREGORIO
AUCTORE

EXPOSITIO
GEOMETRICA
A
JACOBO GREGORIO
AUCTORE
EXPOSITIO
GEOMETRICA
A
JACOBO GREGORIO
AUCTORE



Præfatio.

IAnta est in ratiocinio Mathematico certitudo & evidentia, ut coritè considerato nihil non audeant etiam Viri modestissimi: si tamen magni quid tentaverint, adeo innata est humano generi invidia & æmulationis, ut generalis quasi fiat consensus, illos ludibrio exponendi: eorum enim inventa (etiamsi verissima) à prorsus ignaris deridentur, à sciolis vel surripiuntur vel rejiciuntur, & à verè doctis (quorum judicio & authoritati talia submittuntur) neglecta manent. Imo non desunt, qui, ejusdem inventi partem ignobiliorem, aliis quippe approbatam, sibi arrogant, & reliqua longè subtiliora non sine famæ suæ jacturâ fastuosè rejiciunt

A 2

Præfatio.

ciunt; responsa interim spernunt, præclarius existimantes, infallibiles haberi apud ignaros, quàm ingenui apud doctos : O cæca famæ libido, quæ homines ita dementat, ut omniscii apparere satagant ! Non carent hoc communi fato nostræ de circulo & hyperbolâ lucubrationes, quas à paucissimis video vel intelligi vel examinatu dignas æstimari : Censores enim plerique scriptorum potius famam quàm rationes considerant ; nam adeo arridet hominibus autoritas, ut nihil novi (quod alicujus momenti sit) à novis authoribus inveniri credant. Ego tam iniquis censuris stimulatus, hisce exercitationibus conabor ostendere, etiam in rebus Mathematicis maximè obviis & usui humano necessariis, non pauca esse quæ subtilissimos Geometras hucusque latuerunt ; atque ita fortasse de aliis nostris speculationibus minùs rigidè judicabitur. Quæ interim objiciuntur à præstantissimo Geometra contra nostram Doctrinam, hic resolvere conabor. *Admitto (inquit) in Prop, 11 Demonstratum esse, quod Sector ABIP non sit analyticè compositus à triangulo ABP & Trapezio ABFP ; sed non video ubi demonstretur Sectorem ABIP non esse analyticè*

154
Præfatio.

lyticè compositum ex aliis quantitatibus. Ego facile agnosco infinitas alias esse quantitates, è quibus analyticè componitur Sector $ABIP$, sed R. Virum interrogo, quomodo innotescant illæ quantitates è datis solummodo triangulo ABP & Trapezio $ABFP$, nam hæ Problema determinant, & proinde aliæ frustra dantur : si autem inveniantur ; inveniuntur vel analyticè vel non analyticè ; si posterius, concedo totum ; si autem analyticè inveniantur è quantitatibus ABC , $ABFP$, & Sector rursus analyticè componatur ex illis ; Idem Sector etiam analyticè componetur ex quantitatibus ABP , $ABFP$, quod est absurdum, nempe contra Prop. 11, quæ admittitur. Si autem insistatur, Sectorem posse componi analyticè ex aliis quantitatibus, quæ illum determinant præter ABP , $ABFP$: dico ABP , $ABFP$, vel posse componi analyticè ex aliis illis quantitatibus vel non ; si posterius, concedo totum, sed tales quantitates exhiberi desidero ; si prius, Analyseos tenorem examinando, satis constabit alias illas quantitates etiam analyticè componi ex ABP , $ABFP$, & ita ad primum casum relabimur. Satis etiam sciunt Geometræ, perinde esse quo.

Prefatio.

quo ad solutionem, quomodocunque determinetur problema; si igitur solutio analytica sit impossibilis ex quantitatibus ABP , $ABFP$, illud determinantibus; impossibilis etiam erit ex aliis, quæ analyticè exhiberi possunt. Existimabam duas nostras petitiones unà cum scholio Prop. 11. huic dubio satisfecisse; sed fateor humeris meis onus impar, nova principia (etiam si intellectui claro & exercitato evidentissima) ita stabilire, ut unicuique satisfiat. Possem aliis objectionibus hic respondere, quæ me anxium tenebant, dum hæc primò mente revolverem; sed animadverto objectiones Mathematicas cuilibet præter Authorem proprium frivolas apparere. In Epistola *veræ Circ. & Hyperb. quadraturæ* pag. 5. Agnosco me totum institutum ad puram Geometriam non reduxisse, quoniam robur principalis prop. nempe 11. dependet tantum ex Canonibus analyticis; adeo certa tamen est, ut, eâ vacillante, necessario corruat tota Analysis: at in reliquis omnibus existimo me rigorosè satisfecisse. Si autem quis velit rigore Geometrico prop. 11. demonstrare; poterit fortasse in institutum assequi hac ratione. Demonstratur primo

155
Præfatio.

mò hæc notio incommensurabilitas: Si fuerint duæ
vel plures quantitates inter se commensurabiles,
& quædam alia, quæ ex illarum Additione, Sub-
ductione, Multiplicatione, Divisione, non po-
test componi; erit illa alia quantitas prioribus
incommensurabilis, & vice versâ: deinde ex hac
notione deducatur universalis doctrina incom-
mensurabilitatis; quæ erit non solum analoga
huic doctrinæ non analyticæ, sed illi etiam viam
sternet.

Errata

Errata quæ sensum perturbant sic corrigantur.
Pag. 12. L. 11. pro $\frac{1}{2}$ sexti lege $\frac{1}{3}$ sexti. Pag. 13. L. 21. pro H sem-
per leg. L. Pag. 15. L. 24. pro EV lege FV.

APPEN-

APPENDICULA
Ad Veram
CIRCULI
&
HYPERBOLÆ QUADRATURAM.



Nte menses aliquot evulgavit Nobilissimus Vir *Christianus Hugenius* animadversiones quasdam in meam Circuli & Hyperbolæ quadraturam, quibus existimo me (in transactionibus Philosophicis Mensis *Julii*) solide satisfecisse : dux autem fuerunt parvi momenti, quibus tunc temporis respondere non potui; utpote in ejus scriptis nequaquam versatus : prima erat, quod mea circuli approximatio esset minus præcisa quam sua; secunda, quod mea Hyperbolæ mensuratio esset optima, quam tamen non credebat R. Societati apparere novam, quoniam illam eandem Hyperbolæ quadraturam ante aliquot annos supposuit; Dum R. Societati monstraret methodum suam inveniendi aeris gravitates in diversis a terra distantis. Conatur hic tacite *Hugenius* me ignorantia & plagii accusare; sed non animadvertit se sibi contradicere, dum meam Hyperbolæ mensurationem amplectitur, circularem autem rejicit, cum utraque una & eadem sit : oportet ergo ut non percipiat ultimas suas approximationes in libro de magnitudine Circuli (quas tanti æstimat) Hyperbolæ etiam esse applicabiles; debuit igitur & meam Hyperbolæ quadraturam rejicere : at animadvertendum est ultimam meam approximationem (cujus demonstratio ex hac appendicula dependet) in fine Prop. 25, magis esse præcisam & multo minus laboriosam quam ulla *Hugeniani*. Quod attinet ad secundam *Hugenii* accusationem : expectabam certe a tanto viro majorem ingenuitatem; Nec enim potui

B

hactenus

(2)

hactenus edoceri, esse quenquam è Societ. Regia, qui tale quid ab *Hugenio* unquam prolatum recordatur. Non solum prædictæ rationes sed etiam aliæ mihi quasi persuadent Hyperbole quadraturam, saltem ante tot annos, *Hugenio* non innotuisse: nam nihil in tota Geometria à Mathematicis adeo est desideratum, immo nec usui humano magis accommodatam, quis ergo Geometra speculationem non solum celeberrimam sed etiam maximæ utilitatis 7 vel 8 annorum spatio adeo superstitiosè celaret; & præcipuè *Hugenius*, qui non adeo alienus est a scribendi pruritu, ut res ordinarias aliquando etiam satis prolixè non edat in lucem: testantur *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portisnum gravitatis Centro*, quæ sunt solummodo confectaria ad generalia *Guldini* inventa, anno 1635 impressa, supposito tantum solido rotundo Hyperbolico circa, Diametrum conjugatam, quod inventu non est difficile: testatur quoque *liber de Magnitudine Circuli*, qui aliud non est quam comparatio segmenti Circularis cum segmento parabolico inscripto vel circumscripto eidem triangulo, satis etiam prolixè in lucem editus: atque hæc omnia subtilitate utilitate & gloriâ Hyperboles quadraturæ longè cedunt, hanc autem suo nomine indignam, vel reliquis saltem indigniorem censuit *Hugenius*. At parum refert quis sit ejus primus inventor, satis enim constat me primum esse publicatorem; neque mihi esset difficile affirmare (si modo mentiri vellem) me ante 20 annos illam cognovisse: utcumque sit, conabor hic Circuli & Hyperbolæ quadraturam ad talem perfectionem promovere, ut *Hugenius* prolem suam vix cognoscat.

Invenimus nos duplex compendium in mensuratione Circuli & Hyperbolæ; Primum consistit in continuatione seriei conyergentis; Secundam in methodo inveniendi approximationes.

2 L		A	B
M	a	C	D
P	2 Q	E	F
R	4 S	G	H
T	8 V	I	K
X	16 Y	N	O
		Z	

PROP.

PROP. I.

Inter A, B quantitates arbitrarias sit media Geometrica C, item inter C, B sit media harmonica D, & continuetur series convergens, ut sit ejus terminatio, seu Circuli, Ellipseos vel Hyperbolæ sector Z. Sit ut B ad C ita quantitas ad libitum $2L$ ad M, sitque inter L & $2L + M$ media Geometrica P, & fiat $Q^2 =$ differentia inter $4L^2$ & P^2 , item $a^2 =$ differentia inter $4L^2$ & M^2 . Dico $a : 2Q :: C : E$. Nam $B : C :: 2L : M$, & convertendo & componendo $C + B : B :: M + 2L : 2L$, sed $C + B : B :: 2C : D$, & ideo $2C : D :: M + 2L : 2L$, & duos ultimos analogia terminos ducendo in differentiam inter M & $2L$, $2C$ est ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $4L^2$ & $2ML$, & consequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, C est ad D ut differentia inter $4L^2$ & M^2 ad differentiam inter $8L^2$ & $4ML = 4Q^2$, hoc est, C^2 est ad E^2 ut differentia inter $4L^2$ & $M^2 = a^2$ ad $4Q^2$, & ideo $C : E :: a : 2Q$, quod, &c.

PROP. II.

Eisdem positis quæ in antecedente. Dico $E : D :: P : 2L$. ex antecedente $2C : D :: M + 2L : 2L$, & ultimos terminos ducendo in L, $2C : D :: ML + 2L^2 : 2L^2$, & consequentes duplicando, item priores bipartiendo $C : D :: ML + 2L^2 = P^2 + 4L^2$, & ideo $E : D :: P : 2L$, quod, &c.

PROP. III.

Eisdem positis, sit inter L & $2L + P$ media Geometrica R, sitque $S^2 =$ differentia inter $4L^2$ & R^2 . Dico $C : G :: a : 4S$. Est enim $E : D :: P : 2L$, & componendo $E + D : D :: P + 2L : 2L$, sed $E + D : D :: 2E : F$, & proinde $2E : F :: P + 2L : 2L$, & posteriores terminos ducendo in differentiam inter $2L$ & P, item consequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, E est ad F ut differentia inter $4L^2$ & $P^2 = Q^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & $4PL = 4S^2$, & ideo $E : G :: Q : 2S$, & $E : G :: 2Q : 4S$, at ex hujus ima $C : E :: a : 2Q$, & ideo ex æqualitate $C : G :: a : 4S$, quod, &c.

B 2

PROP.

PROP. IV.

Eisdem politis, dico $G:F::R:2L$. ex antecedente $2E:F::P+2L:2L$, & posteriores terminos ducendo in L , $2E:F::PL+2L^2:2L^2$, & consequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, $E:F::PL+2L^2=R^2:4L^2$, & ideo $G:F::R:2L$, quod, &c.

PROP. V.

Eisdem positis, sit inter L & $2L+R$ media Geometrica T , sitque V^2 æqualis differentia inter $4L^2$ & T^2 . Dico $C:I::a:8V$. Est enim $G:F::R:2L$ & componendo $G+F:F::R+2L:2L$, sed $G+F:F::2G:H$, & ideo $2G:H::R+2L:2L$, & posteriores terminos ducendo in differentiam inter $2L$ & R , item consequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, G est ad H ut differentia inter $4L^2$ & $R^2=S^2$ ad differentiam inter $8L^2$ & $4RL=4V^2$, & ideo $G:I::S:2V$, & $G:I::4S:8V$, & ex hujus 3^{ia} $C:G::a:4S$, & ideo ex æqualitate $C:I::a:8V$, quod, &c.

SCHOLIUM.

EX prædictis manifestum est seriem $a, 2Q, 4S, 8V, 16Y$, &c. esse analogam seriei C, E, G, I, N ; & proinde ut a ad terminationem suæ seriei ita C ad sectorem Z : at posita $2L$ binario cum numero quodam cyphrarum, inveniuntur omnes M, P, R, T, X , ex tot radicis quadratæ extractionibus; & proinde poterit series $a, 2Q$, &c. Produci ad libitum à paucis operationibus, ex gr. si desiderarem terminum $16Y$; produco seriem M, P , &c. in X , cujus quadrati differentia à $4L^2$ est quadratum ipsius Y : si autem quærat terminus convergens debitus termino $16Y$, dividatur duplum quadrati ipsius $16Y$ per $8V+16Y$, & quotus dabit quæsitum. Atque hoc est compendium non inelegans ad producendas Circuli, Ellipseos vel Hyperbolæ prolixiores series convergentes; non tamen est dissimulandum hanc methodum esse lubricam & in longa continuatione multas è notis posterioribus falsificare, ob continuam Multiplicationem Numerorum Progressionis Geometricæ duplæ a binario.

Antequam

(5)

Antequam accedamus ad secundum nostrum compendium, considerentur hic Circuli proprietates quadam eximia.

Sit A polygonum regulare Circulo inscriptum, B eidem simile circumscriptum, C polygonum inscriptum, duplum habens laterum numerum, D eidem simile circumscriptum, & continuetur series convergens, &c.

C erit medium Geometricum inter A & B.

D erit medium harmonicum inter C & B.

Si B ponatur perimeter polygoni B, erit C perimeter polygoni A, quoniam similia polygona B, A, sunt in duplicata ratione perimetrorum; erit quoque D perimeter polygoni D, quoniam polygona Circulo circumscripta sunt in eadem ratione cum suis perimetris; eodem modo erit E perimeter polygoni C, Item F perimeter polygoni E, & sic deinceps.

Perimeter polygoni D erit medium harmonicum inter perimetros polygonorum A, B.

Perimeter polygoni C erit medium Geometricum inter perimetros polygonorum A, D.

Hæ proprietates non solum insunt Circulo integro, sed etiam (consideratis considerandis) omni sectori: tertiam autem proprietatem si animadvertisset *Hugenius*, illi nonopus fuisset tam prolixis demonstrationibus easdem approximationes a polygonis ad eorum perimetros revocare, cum series polygonorum eadem sit cum serie perimetrorum.

Secundum nostrum compendium consistit in methodo inveniendi approximationes, quæ sequenti theoremati superstruitur.

THEOREMA.

In quacunque serie convergente AB, CD, &c. P
cujus terminatio Z, si fuerit quantitas P eodem modo composita à terminis A, B, quo Q
à terminis C, D, & P major fuerit quam Q:
denique si componatur Q eodem modo à quantitatibus aequalibus X, X, quo à terminis C, D
erit X major quam Z: si autem P fuisset minor quam Q, foret X minor quam Z.

P	A	B
	C	D
	E	F
Q	G	H
	I	K
	L	M
X		
	Z	

Quoniam

Quoniam enim P eodem modo componitur à terminis A, B, quo Q à terminis CD, & P major est quam Q, erit etiam Q major quam quantitas eodem modo composita à terminis EF, & hæc major quam quantitas eodem modo composita à terminis GH, & sic in infinitum usque ad Z; & proinde Q multo major erit quam quantitas eodem modo composita à Z, Z, quo Q à CD vel X, X; hoc est, Q composita à X, X, major est quam quantitas eodem modo composita à Z, Z; & ideo X major est quam Z, quod, &c. Eodem prorsus modo demonstratur secunda Theorematis pars.

Ex hoc Theoremate (ceteris paribus) facile patet differentiam inter X & Z eo esse minorem, quo minor fuerit indefinita differentia inter P & Q. Hinc patet campus vastissimus inveniendi approximationes non solum in Circuli & Hyperbolæ mensura, sed etiam in omnium aliarum serierum convergentium terminationibus: nos tamen unam particularem methodum eligimus, quam existimamus esse reliquis faciliorem & minus prolixam, nempe ex inventorum terminorum combinatione; in hac enim prolixæ operationes Arithmeticæ evitantur. Ope nostræ methodi sequentes invenimus approximationes, quæ hic examinandæ subjiciuntur.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra Circuli vel Ellipseos sectorem, B extra: continuetur series convergens in infinitum (nempe in CD, EF, GH, &c.) ut sit ejus terminatio seu Circuli vel

Ellipseos sector Z. Erit Z minor quam $\frac{16C + 2B - 3A}{15}$ & major quam $\frac{16D + A - 2B}{15}$, hæc approximatio veras notas terminorum CD triplicat. Erit Z minor quam $\frac{768F + 256E - 76D - 4C + B}{945}$

& major quam $\frac{1024E + 128D - 208C + 3A - 2B}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum EF quadruplicat. Erit Z minor quam $\frac{12288E + 16384F - 576D - 1328C + 2B + 5A}{26775}$ & major quam $\frac{512E + 512F - 72C + A - 8D}{945}$, hæc approximatio veras notas terminorum EF quintuplicat. Erit Z minor quam $\frac{524288G + 524288H - 74240E - 8704F + 1096C - A + 8D}{966735}$

&c

(7)

& major quam

$$\frac{12582912G + 16777216H - 606208E - 1372160E + 2624D + 5448C - 2B - 5A}{27390825}$$

hæc approximatio sextuplicat veras notas terminorum GH. Erit Z minor quam

$$\frac{5153960755I + 68719476736K - 2499805184H - 5632950272G + 11354112F + 27783168E - 10816D - 26928C + 2B + 5A}{112165428375}$$

& major quam

$$\frac{2147483648I + 1147483648K - 304611328G - 36175872H + 4563456E + 41472F - 5192C - 8D + A}{3958779825}$$

hæc approximatio septuplicat veras notas terminorum IK.

Ut appareat hanc nostram methodum etiam esse applicabilem seriebus simplicibus, sequentes considerentur approximationes. Erit Z major

quam $\frac{64E - 20C + A}{45}$, quæ veras notas triplicat; & major quamquam $\frac{4096G - 1344E + 84C - A}{2835}$, quæ quadruplicat; & major quamquam $\frac{1048576I - 348160G + 22848E - 340C + A}{722925}$, quæ quintuplicat;

item & major quam

$$\frac{1073741824L - 357564416I + 23744512G - 371008E + 1364C - A}{739552275}$$

quæ sextuplicat.

Erit quoque Z minor quam $\frac{64F - 20D + B}{45}$, quæ triplicat, & majorquam $\frac{4096H - 1344F + 84D - B}{2835}$, quæ quadruplicat, & minor quamquam $\frac{1048576K - 348160H + 22848F - 340D + B}{722925}$, quæ quintuplicat;

& major quam

$$\frac{107341824M - 357564416K + 23744512H - 371008F + 1364D - B}{739552275}$$

quæ sextuplicat.

Quod, si quis desideret approximationes omnium possibilium simplicissimas, sequentes tales esse non sine ratione affirmo. Erit Z minor

quam $\frac{8C + 8D - A}{15}$, & major quam $\frac{12D + 4C - B}{15}$, quæ triplicat;& minor quam $\frac{320E + 256F - 52C + A}{325}$, & major quam .

(8)

$$\frac{48C + 64D - 2B - 5A}{105}, \text{ quæ quadruplicat; item minor quam}$$

$$\frac{24704E + 35072F - 1356D - 2460C + 5B}{55965}, \text{ \& major quam}$$

$$\frac{512E + 512F - 72C + A - 8D}{945}, \text{ quæ quintuplicat.}$$

Omnes hæ approximationes (si analytice examinentur) præcedenti Theoremati quadrabunt; & insistendo vestigiis analyseos, dicto Theoremati superstruenda est compositio Geometrica, quæ satis difficilis & intricata reperietur. Methodum has approximationes inveniendi, ob diversas rationes mihi satis perspectas, celare statuo: paratus tamen sum non solum alias longè differentes harum loco substituere, sed etiam approximationes exhibere, quæ veras notas octuplucunt, nonuplicent, decuplicent, &c. in infinitum etiam in aliis seriebus convergentibus ex sola hac terminorum convergentium combinatione.

Posito A polygono sectori Hyperbolico circumscripto, & B inscripto &c, eadem approximationes inserviunt Hyperbolæ, hoc solo observato quod (in verarum notarum triplicatione, quintuplicatione, septuplicatione, &c.) major approximatio nunc fiat minor & è contra.

Non opus est ut lectorem admoneam (modo prædicta intellexerit) has approximationes inservire curvis circularibus & earum adscriptis: Placet tamen sequentes approximationes exhibere huic proposito accommodatas. Sit A sinus alicujus arcus, B ejusdem tangens, C chorda & D tangens resecta a recta per terminum diametri, seu duplum tangentis semissis arcus: erit arcus minor quam $\frac{96C - 22A + B}{75}$, item minor

$$\text{quam } \frac{16C - 3A + 2D}{15}, \text{ quæ utraque veras notas triplicat, \& major}$$

$$\text{quam } \frac{320C + 52D - 56A - B}{315}, \text{ quæ quadruplicat.}$$

N. MERCATORIS

460

N. M E R C A T O R I S.
QUADRATURA
HYPERBOLES GEOMETRICE
Demonstrata.

PROP. I.

SI fuerint quantitates continuè proportionales $A, B, C, D, E, F,$
&c. numero infinitæ, quarum prima & maxima A ; erit $A - B$
 ad A ut A ad summam omnium, hoc enim passim demonstratur
 apud Geometras.

PROP. II.

Eisdem positis quæ antecedente; dico $A + B$ esse ad A ut A est ad
 excessum omnium $A, C, E, G,$ *&c.* in locis imparibus, supra
 omnes $B, D, F,$ *&c.* in locis paribus: est enim dictus excessus summa
 seriei infinitæ continuè proportionalium in ratione A ad C , nempe
 $A - B, C - D, E - F,$ *&c.* & ideo (ex precedente) ut $A - C$ ad
 A vel $A^2 - B^2$ ad A^2 , ita $A - B$ ad summam dictæ seriei, quam vocamus
 Z ; & priores analogiæ terminos applicando ad $A - B$, $A + B$ est
 ad $\frac{A^2}{A - B}$ ut $A - B$ ad Z , & ideo $AZ + BZ = A^2$, & proinde
 $A + B$ est ad A ut A ad Z excessum omnium $A, C, E, G,$ *&c.* supra
 omnes $B, D, F,$ *&c.* quod demonstrare oportuit.

C

PROP.

PROP. III.

Fig. 1.

It Hyperbola SB_3 , cujus vertex B , asymptotæ RA , A_4 asymptotæ RA ducatur parallela BK , & altera ad libitum inter rectas BK , RA , utrique parallela YD ; Dico YD esse summam infinitæ seriei continuè proportionalium, cujus primus terminus $BK=KA$ & secundus KD ; est enim $BK-KD=AD$ ad BK ut BK ad DY ; & ideo ex hujus prima patet propositum.

Eisdem rectis RA , BK , ultra punctum K fiat parallela 34 ; dico rectam 34 æqualem esse excessui omnium terminorum imparium supra omnes terminos pares infinitæ seriei cujus primus terminus KB , & secundus K_4 ; est enim $KB+K_4=A_4$ ad BK ut BK ad 34 ; & ideo ex hujus 2 patet propositum.

PROP. III.

Fig. 1.

It $SBKH$ spatium Hyperbolicum, contentum à curva Hyperbolica SB , asymptotæ portione HK , & rectis SH , BK , alteri asymptotæ parallelis, posito B Hyperbolæ vertice: fit parallelogrammum $BKHS$, & producat B_5 in R , jungaturque KR quæ 5 H secet in 6 : deinde continuetur series infinita continuè proportionalium nempe $5H$, $6H$, LH , NH , & sic deinceps; sitque $5BKH$ parallelogrammum, $K6H$ triangulum, KLH trilineum quadraticum, KNH trilineum Cubicum, & ita deinceps in infinitum. Dico spatium Hyperbolicum, $BKHS$ æquale esse dicto parallelogrammo, dicto triangulo, una cum infinitis illis trilineis, quorum omnium summam vocamus ω . Si Figura $BKHS$ & ω non sunt æquales, sit inter illas differentia α ; & dividatur recta HK in tot partes æquales à rectis asymptotæ RA parallelis, ut rectangula (ab illis & portionibus rectæ KH contenta) Figuræ $BKHS$ circumscripta, nempe VH , ZD , differant à rectangulis Figuræ $BKHS$ inscriptis, nempe YH , BD , minore intervallo quàm α ; hoc enim fieri potest ab indefinita divisione rectæ KH . Quoniam B est Hyperbolæ vertex, parallelogrammum $BKAR$ est æquilaterum; & proinde recta $6H$ ad libitum est æqualis rectæ HK , cumque $5H$, $6H$, LH , NH , &c. sint continuè proportionales in infinitum, ex hujus 3 erit recta SH æqualis summæ omnium, & parallelogrammum SD æquale summæ omnium parallelo-

parallelogrammorum ζD , $6D$, LD , ND , &c. in infinitum; atque summa omnium parallelogrammorum ζD , $6D$, LD , ND , &c. in infinitum, major est parallelogrammo ζD unà cum portione trianguli $6FDH$ unà cum portione trilinei quadratici $LCDH$ unà cum portione trilinei cubici $NCDH$, &c. in infinitum, quoniam prædictæ portiones dictis parallelogrammis inscribuntur, & ideo parallelogrammum SD majus est parallelogrammo ζD unà cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum YK majus esse rectangulo $7K$ unà cum infinitis numero portionibus FKD , CKD , OKD , &c. & proinde rectilineum $SVYZKH$ majus est quàm ω . Deinde recta FD est æqualis rectæ DK ; atque $7D$, FD , CD , OD , &c. sunt rectæ continuè proportionales in infinitum, & igitur recta YD est æqualis ipsarum summæ, & parallelogrammum XD æquale parallelogrammis $7H$, FDH , CDH , ODH , &c. at summa parallelogrammorum $7H$, FDH , CDH , ODH , &c. minor est quàm rectangulum $7H$ unà cum portione trianguli $6FDH$ unà cum portione trilinei quadratici $LCDH$ unà cum portione trilinei cubici $NCDH$, &c. quoniam dicta parallelogramma dictis portionibus inscribuntur, & ideo parallelogrammum YH minus est parallelogrammo $7H$ unà cum dictis portionibus; eodem modo demonstratur parallelogrammum BD minus esse parallelogrammo BD unà cum infinitis numero portionibus FKD , CKD , OKD , & ideo rectilineum $XY7BKH$ minus est quàm ω : quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectilinea $SVYZKH$, $XY7BKH$, intermediæ autem ω & spatium Hyperbolicum $SBKH$; & ideo differentia intermediarum, nempe α , minor est quàm differentia extremarum, quod est absurdum, ponitur enim major; nulla igitur est differentia inter Figuram $SBKH$ & ω , & ideo æquales sunt, quod demonstrandum erat.

Et proinde si fuerit series infinita quantitatum continuè proportionalium in ratione KB ad $KH = 6H$, cujus primus terminus est parallelogrammum BH ; erit primus terminus $+\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii $+\frac{1}{4}$ quarti $+\frac{1}{5}$ quinti $+\dots$ in infinitum $=$ spatio Hyperbolico $SBKH$, hoc enim evidenter sequitur ex quadratura trilineorum. Conf. 1.

Si autem ultra K sumatur spatium $B34K$, positâ 34 parallela rectæ BK , & sit series infinita quantitatum in continua ratione BK ad $K4$, cujus primus terminus est parallelogrammum KQ ; erit primus terminus $-\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii $-\frac{1}{4}$ quarti $+\dots$ in infinitum $=$ spatio Hyperbolico $B34K$: poterit hoc consecutarium eodem ferè modo demonstrari Geometricè ex secunda conclusione hujus tertie, quo antecedens ex ejusdem conclusione priore; utrumque autem ex methodo indivisibilium

lium Cavallerianâ nullo negotio demonstratur; sed quoniam magni sunt momenti, placuit methodum rigorosam adhibere.

- Quod si $K_4 = KH$, & fuerit series infinita quantitatum in continuâ
- Conf. 3. ratione BK ad $K_4 = KH$, cujus primus terminus est $BH = B_4$; erit excessus spatii $SBKH$ supra spatium $B_3_4K =$ toti secundo termino $+\frac{1}{2}$ quarti $+\frac{1}{3}$ sexti $+\frac{1}{4}$ octavi $+\text{etc.}$ in infinitum: Nam ex primo consecutario, spatium $SBKH =$ primo termino $+\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii $+\frac{1}{4}$ quarti $+\text{etc.}$ in infinitum: & ex secundo consecutario spatium $B_3_4K =$ primo termino $-\frac{1}{2}$ secundi $+\frac{1}{3}$ tertii $-\frac{1}{4}$ quarti $+\text{etc.}$ at manifestum est horum differentiam $=$ toti secundo $+\frac{1}{2}$ quarti $+\frac{1}{3}$ sexti $+\frac{1}{4}$ octavi $+\text{etc.}$ & ideo patet propositum.
- Conf. 4. Eisdem politis quæ in antecedente consecutario, manifestum est spatium Hyperbolicum $SH_4_3 =$ duplo primi termini $+\frac{2}{3}$ tertii $+\frac{2}{5}$ quinti $+\frac{2}{7}$ septimi $+\frac{2}{9}$ noni $+\text{etc.}$ in infinitum.

PROP. V.

Fig. 2.

Si Hyperbola CEL , cujus vertex E , & asymptotæ AB , AY ; in qua sumantur duo spatia Hyperbolica ad libitum $HITR$, $KLYV$, contenta à curvâ Hyperbolicâ, unâ asymptotâ & rectis alteri asymptotæ parallelis: dividantur rectæ RT , VY , bifariam in S & X punctis.

Dico spatium $HITR$ esse ad spatium $KLYV$, ut $\frac{RS \times AO}{AS}$

$$+\frac{RS^3 \times AO}{3AS^3} + \frac{RS^5 \times AO}{5AS^5} + \frac{RS^7 \times AO}{7AS^7} + \text{etc. in infinitum ad}$$

$$\frac{VX \times AO}{AX} + \frac{VX^3 \times AO}{3AX^3} + \frac{VX^5 \times AO}{5AX^5} + \frac{VX^7 \times AO}{7AX^7} + \text{etc. in infinitum.}$$

Asymptotæ AB fiat recta parallela EO , sitque ut AS ad AR ita $AO = EO$ ad AM ; & ut AS ad AT ita AO ad AQ ; similiter, sit ut AX ad AV ita AO ad AN , & AO ad AP ut AX ad AY ; manifestum est $MO = OQ$ & $NO = OP$. Ductis rectis MC , ND , PF , QG , evidens est (ex Hyperbolæ proprietatibus) spatium $CGQM$ esse æquale spatio $HITR$ & spatium $DFPN$ spatio $KLYV$; at patet (ex consecutario 4 antecedentis) spatium $CGQM$ esse ad spatium $DFPN$, ut $MO + \frac{MO^3}{3AO^2} + \frac{MO^5}{5AO^4} + \frac{MO^7}{7AO^6} + \text{etc.}$ ad $NO + \frac{NO^3}{3AO^2} + \frac{NO^5}{5AO^4} + \frac{NO^7}{7AO^6} + \text{etc.}$ quæ analogia eadem est cum proposita, quod demonstrandum erat.

Hinc

Hinc manifestum est (ob analogiam inter spatia Hyperbolica & Logarithmos) differentiam inter Logarithmos numerorum A, B, esse ad differentiam inter Logarithmos numerorum D, E, (posito C medio Arithmetico inter A, B, & F medio Arithmetico inter D, E, item N differentia inter C & A, & O differentia inter F & D) ut

$$\frac{N}{C} + \frac{N^3}{3C^3} + \frac{N^5}{5C^5} + \frac{N^7}{7C^7} + \dots$$

ad $\frac{O}{F} + \frac{O^3}{3F^3} + \frac{O^5}{5F^5} + \frac{O^7}{7F^7} + \dots$ & ideo si ponatur $A=D=1$, hinc patet Methodus inveniendi Logarithmum quemcunque ex uno dato, absque ulla Hyperbolæ consideratione, sed calculo plerumque nimis laborioso. Quod si ponatur $A=999$, $B=1001$, cum datis Logarithmis, item D, E, numeri dati majores, unitate vel parvo aliquo intervallo differentes, nullo negotio invenietur differentia Logarithmorum numeris D, E, debitorum; hac Methodo non difficulter computatur integra Logarithmorum tabula ad quovis notas.

Facile quoque deducitur (ex 3 Consect. antecedentis Prop.) differentiam secundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica G, H, I, esse ad differentiam secundam Logarithmorum numerorum in ratione Arithmetica K, L, M, (posito P differentia inter G, H, & Q differentia inter K, L,) ut

$$\frac{P^2}{H^2} + \frac{P^4}{2H^4} + \frac{P^6}{3H^6} + \dots$$

ad $\frac{Q^2}{L^2} + \frac{Q^4}{2L^4} + \frac{Q^6}{3L^6} + \dots$ non dissimili ferè methodo determinantur differentia Logarithmorum tertiæ, quartæ, quintæ, & sic deinceps; sed non est operæpretium illas prosequi: primæ enim differentia compositioni Logarithmorum abundè sufficiunt.

ANALOGIA
 Inter
 LINEAM MERIDIANAM
 PLANISPHERII NAUTICI:
 &
 TANGENTES ARTIFICIALES
 Geometricè Demonstrata, &c.

PROP. I. THEOREMA.

Fig. 3.

Sit Circuli quadrans TQZ , cujus pars sit arcus QI : super
 arcu QI imaginetur portio superficiei cylindrici recti talis
 naturæ, ut (sumpto in arcu QI quolibet puncto O) perpen-
 dicularis ad planum TZQ ex puncto O ad summitatem por-
 tionis superficiei cylindricæ excitata semper fiat æqualis secanti
 arcus OQ . Deinde sit mixtilineum $AIYTQ$ talis naturæ,
 ut (ducta in eo recta XD radio QT parallela & arcum quadrantis
 secante in puncto ad libitum O) recta DX , secans arcus OQ , &
 radius TQ sint continuè proportionales. Dico mixtilineum $AYIQ$
 esse æquale dictæ portioni superficiei cylindricæ: si prædictæ Figuræ
 non sunt æquales, sit inter illas differentia α , & dividatur recta YT in
 tot partes æquales à rectis BX , EV , radio QT parallelis, ut (com-
 pletis rectangulis AX , DV , GT , CX , FV , $\wedge T$) differentia recti-
 lineorum $ABDEGHTY$, $CDFG \wedge QTY$, sit minor quàm α ;
 manifestum est enim hoc fieri posse ab infinita divisione rectæ YT .
 Ducatur in puncto O recta tangens OPM , sitque in rectam EV per-
 pendicularis OS : triangula OPS , TMO , rectangula ad S & O
 sunt

sunt similia ob æqualitatem angulorum POS , OTM ; nam ab angulis æqualibus nempe rectis POT , SOX , auferendo eundem angulum SOT , relinquuntur anguli æquales POS , XOT , atque ob parallelas OX , QT , angulus XOT æqualis est angulo OTM , & ideo æquales sunt anguli POS , OTM ; & proinde ut OS ad OP , ita OT ad TM , ut autem OT ad TM ita TM ad XD , & igitur rectangulum OS in XD , nempe rectangulum DV , æquale est rectangulo TM in OP , sed rectangulum TM in OP majus est portione superficiæ cylindricæ rectæ insistente curvæ ON , quoniam (TM existente maxima ejusdem portionis altitudine) recta PO major est quàm curva NO , ut patet ex Prop. 1. Geomet. part. universalis; & proinde rectangulum DV majus est quàm portio superficiæ cylindricæ rectæ insistentis curvæ ON : eodem modo demonstratur GT majus portione ejusdem superficiæ insistente curvæ NQ & AX majus portione super curva IO , & ideo rectilineum $ABDEGHTY$ majus est integrâ propositâ portione superficiæ cylindricæ; idem quoque rectilineum majus est mixtilineo $AQTY$. Tangens in puncto N ducatur LNK , à parallelis proximis utrinque terminata in L , K ; ex Prop. 1. Geomet. part. univer. patet rectam LN seu NK minorem esse arcu ON , sed (ut hactenus) demonstratur rectangulum GT vel FV æquale esse rectangulo NK vel NL in KT ; atque rectangulum NL in KT minus est portione superficiæ cylindricæ rectæ insistente curvæ ON , quoniam (TK existente minima ejusdem portionis altitudine) recta LN minor est curvâ ON ; & proinde rectangulum EV minus etiam est quàm prædicta portio: eodem modo demonstratur rectangulum AT minus esse portione super curva NQ & rectangulum CX minus portione super curva IO , & ideo rectilineum $CDFGAQTY$ minus est integrâ propositâ superficiæ cylindricæ rectæ portione, idem quoque rectilineum minus est mixtilineo $AQTY$: ex prædictis ergo manifestum est quatuor esse quantitates, quarum maxima & minima sunt rectilinea $ABDEGHTY$, $CDFGAQTY$, intermediæ autem superficiæ cylindricæ portio proposita & mixtilineum $AQTY$; & ideo differentia intermediarum minor est quàm differentia maximæ & minimæ, differentia autem maximæ & minimæ ex constructione minor est quàm α , & proinde differentia intermediarum nempe superficiæ cylindricæ & mixtilinei $AQTY$ multo minor est quàm α , quod est absurdum, ponitur enim α , non igitur differunt mixtilineum $AQTY$ & proposita superficiæ cylindricæ portio; & ideo æqualia sunt, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. II. THEOREMA.

Fig. 4. **S**it Circuli quadrans QML , sitque mixtilineum $AHLQM$ talis naturæ, ut (ducta recta ad libitum HN radio LQ parallela & quadrantis arcum secante in K) recta HN æqualis sit secanti arcus LK , sitque mixtilineum $ABLQM$ talis naturæ, ut (producta arbitraria NH in B) rectæ LQ , NH , NB , sint continuè proportionales: deinde sit Semihyperbola IDE cujus axis MA , vertex I & asymptoton MLE : ducatur ad libitum radio LQ parallela recta NB , curvas LKM , LHA , LBA , secans in punctis K , H , B ; & per punctum H ducatur radio MQ recta parallela HF Hyperbolæ occurrens in puncto D . Dico Sectorem Hyperbolicum IMD æqualem esse semissi Figuræ $BLQN$, quæ Figura (ut in antecedente demonstratum est) æqualis est superficiei cylindricæ conflata ex omnibus secantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis suis punctis O normaliter insistentibus. Ex *Gregorii à S. Vincentio* doctrina ductum, truncus cylindrici recti super Figura $LHNQ$ resectus à plano basin senimormaliter secante in recta QM , æqualis est semissi cylindrici recti cujus basis est Figura $LBNQ$ & altitudo recta LQ , quoniam LQ semper est ad NH ut NH ad NB : manifestum autem est eundem truncum oriri ex ductu trianguli rectanguli isoscelis TGM in Figuram $LHNQ$, hoc est ex ductu trianguli rectanguli isoscelis TGM in Figuram $LHNQ$, hoc est ex ductu trianguli rectanguli isoscelis ωIM in rectangulum $VLQN$ & ex ductu trapezii $TGI\omega$ in Figuram HLV ; atque solidum factum ex ductu trianguli rectanguli ωIM in rectangulum $VLQN$ æquale est prisinati cujus altitudo LQ & basis triangulum $I\lambda M$, quod sic probo; $MG^2:MI^2::MI^2:KN^2$, & per conversionem rationis $MG^2:MG^2-MI^2=GD^2::MI^2:MI^2-KN^2=NQ^2$, & ideo $MG:GD::MI:NQ$, ut autem MG ad DG ita qualibet $MP=PR$ ad ductam PS ipsi GD parallelam, & ideo ut PR ad PS ita MI ad NQ , cumque hoc semper fiat, manifestum est prisina cujus basis λIM & altitudo IM æquale esse solido ex ductu trianguli ωIM in rectangulum $VLQN$: item solidum factum ex ductu trapezii $TGI\omega$ in Figuram HLV æquale est cylindrico cujus basis est Figura $ID\lambda$ & altitudo IM , quod sic probo; $GM:GD::MI:QN$, & per conversionem rationis $GM:DF::MI:GH$; ducatur recta ad libitum $Y\xi$ radio MQ parallela & curvas secans ut in Figura, eritque $GM:DF::XM:\gamma\xi$, & ideo $XM=XY:\gamma\xi::MI:$

$GH = XZ$, & ideo $XY \times XZ = MI \times \gamma \xi$; ut autem ante demonstratum est GM esse ad DF ut MI ad GH , eodem modo nunc demonstrari potest $XM = XY$ esse ad $\alpha \xi$ ut MI ad $X\theta$, & ideo $XY \times X\theta = MI \times \alpha \xi$, cumque $XY \times XZ = MI \times \gamma \xi$, si ab æqualibus æqualia auferantur, $XY \times Z\theta = MI \times \alpha \gamma$, cumque hæc æqualitas semper contingat, manifestum est Trapezium TGI ductum in Figuram HLV efficere solidum æquale cylindrico cujus basis ID & altitudo IM ; & proinde totus truncus super Figuram $HLQN$ ortus ex ductu trianguli TGM in eandem Figuram $HLQN$ est æqualis cylindrico cujus basis est sector Hyperbolicus MID & altitudo MI , atque idem truncus æqualis est dimidio cylindrici cujus basis est Figura $BLQN$ & altitudo eadem IM , & ideo semissis cylindrici super Figuram $BLQN$ cum altitudine IM æqualis est cylindrico cujus basis MID & altitudo eadem IM , est igitur Figura $BLQN$ dupla sectoris Hyperbolici MID , quod demonstrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Hinc sequitur, quod Figura $BLQN$ semper sit dupla Logarithmi differentie inter tangentem & secantem arcus KL , posito radio LI loco unitatis, quod sic probo. Ex punctis I, D , in asymptoton ME demittantur perpendiculares $I\sigma, D\pi$; ex demonstratis in Circ. & Hyperb. Quad. manifestum est sectorem MID esse æqualem Figuræ $ID\pi\sigma$, item Figuram $ID\pi\sigma$ esse Logarithmum rectæ $D\pi$ posita $I\sigma$ unitate; ut autem $I\sigma$ ad $D\pi$ ita LI radius ad DF differentiam inter tangentem & secantem, & ideo posita LI unitate erit idem sector MID Logarithmus rectæ DF , nempe excessus qua secans arcus KL superat ejusdem tangentem.

PROP. III. THEOREMA.

Linea Meridiana Planisphærii Nautici est Scala Logarithmorum excessuum, quibus Secantes Latitudinum superant earundem Tangentes, posito radio loco unitatis.

Suppono ex Scriptoribus Nauticis in eorum Planisphærio arcum LK Fig. 4. in Æquatore esse ad eundem LK in latitudine, ut rectangulum ex LQ in KL ad portionem superficiæ Cylindricæ conflata ex omnibus secantibus arcuum infinitorum OL plano LMQ in debitis suis punctis O normaliter insistentibus, seu Figuram $BLQN$; demonstratum autem

autem est in antecedente sectorem hyperbolicum MID seu Logarithmum rectæ DF (posita QL unitate) differentiæ inter tangentem & secantem arcus KL esse semissem Figuræ BLQN, patet quoque sectorem circulem QKL esse semissem rectanguli LQ in KL; & ideo LK in Æquatore est ad LK in latitudine ut sector QKL ad Logarithmum excessus quo secans arcus KL superat ejusdem tangentem; & ideo solidum ex LK in Logarithmum dicti excessus æquale est solido ex LK in latitudine in sectorem QKL, & utrumque solidum applicando ad LK, Logarithmus dicti excessus æqualis est rectangulo ex LK in latitudine $\frac{QL}{2}$; eodem modo demonstratur Logarithmum excessus, quo secans arcus cujuscunque OL excedit ejusdem tangentem, æqualem esse rectangulo ex OL in latitudine in $\frac{QL}{2}$; & proinde Logarithmus excessus quo secans arcus KL superat ejusdem tangentem, est ad rectangulum ex LK in latitudine in $\frac{QL}{2}$ ut Logarithmus excessus quo secans arcus OL superat ejusdem tangentem ad rectangulum ex OL in latitudine in $\frac{QL}{2}$, & permutando, & utrumque rectangulum applicando ad $\frac{QL}{2}$; Logarithmus excessus quo secans arcus KL superat ejusdem tangentem, est ad Logarithmum excessus quo secans arcus OL superat suam tangentem, ut arcus KL in latitudine ad arcum OL in latitudine ab Æquatore Planisphærii Nautici in linea recta computatis; & ideo linea Meridiana Planisphærii Nautici analoga est Logarithmis excessuum, quibus Secantes latitudinum superant suas Tangentes, quod demonstrare oportuit.

SCHOLIUM.

EX hoc Theoremate evidens est Methodus describendi integram meridianam, etiam ignota arcus dati in Æquatore mensura, quam mensuram ex hujus 2 tali praxe invenimus. Sit QL radius 1000000000, DF 1000000000, & proinde ex nostra Circl. & Hyper. quadratura Prop. 32 invenietur sector hyperbolicus MID 1151292546497022812008, qui eandem habet rationem ad sectorem QKL quam arcus KL in latitudine ad eundem in Æquatore, & dividendo utrumque sectorem per $\frac{QL}{2}$ erit ut 2302585092994 045624 ad arcum KL ita KL
in

in latitudine ad eundem in Æquatore; qualis autem sit arcus KL ita invenimus, ut DF excessus secantis arcus KL supra ejusdem tangentem ad LQ radium, ita LQ ad 10000000000 summam tangentis & secantis ejusdem arcus KL , erit ergo KC tangens arcus KL 49500000000, CQ ejusdem secans 50500000000, & NQ ejusdem sinus 9801980198 $\frac{1}{100}$, è quibus non difficile erit invenire ipsum arcum ope nostræ Quadr. Circ. & Hyp. Prop. 30, vel (si quis rudiore calculo contentus fuerit) è Tabula Sinuum. Ad datam autem arcus dati in Æquatore mensuram, Meridianam Nauticam construere, praxis esset hujus inversa, quæ nullo negotio ex hac colligitur.

Ex prædictis manifestè patet Lineam Meridianam Planisphærii Nautici esse scalam tangentium artificialium arcuum, qui sunt semisses complementorum latitudinum,posito radio loco unitatis, quoniam (ut patet ex Trigonometria) prædictæ differentie sunt eadem cum dictis tangentibus. Si autem complementorum Secantes radio insistant, erit Figura ex illis conflata nempe $AHLQMA$ ad quadratum radii ut quadrans circumferentiæ ad radium, ut patet ex nostræ Geom. part. universali Prop. 2^{da}.

PROP. IV. THEOREMA.

Sit Circuli quadrans VOA , cujus sit pars 6° : super arcu 6° inscribatur superficies Cylindrici recti talis naturæ, ut (sumpto in arcu 6° quolibet puncto O) perpendicularis ad planum VAX ex puncto O ad summitatem superficiæ Cylindricæ excitata semper fiat æqualis tangenti arcus OA . Sit hyperbola CPQ cujus vertex C (nempe supposita AC parallelâ & æquali radio XV & asymptotæ XA, XV ; ducantur rectæ $P \infty Y$, 267, radio VX parallelæ: Dico spatium Hyperbolicum 2 PY 7 æquale esse dictæ superficiæ Cylindricæ; si dictæ Figuræ non sint æquales, sit inter illas differentia α , & dividatur recta $7Y$ in tot partes æquales à planis rectæ $7Y$ perpendicularibus & spatium Hyperbolicum in rectis $E\gamma, GZ$, secantibus, item superficiem Cylindricam in diversas portiones dividentibus, ut omnia rectangula Cylindrica simul hisce portionibus inscripta differant ab omnibus rectangulis Cylindricis simul eisdem circumscriptis minore quantitate quàm α , hoc enim absque dubio fieri potest ab indefinita divisione rectæ $7Y$; Intelligo autem rectangulum Cylindricum portioni inscriptum esse superficiem Cylindricam rectam cujus eadem est basis cum portione cui inscribitur, & altitudo ubique eadem cum minima altitudine portionis, item circum-

D 2

scriptum

scriptum cui eadem etiam est basis cum portione, & altitudo eadem cum portione altitudine maxima. Compleantur rectangula 2γ , $B\gamma$, EZ , FZ , GY , NY ; & ducat r in puncto K tangens $LK\xi$, sitque in rectam LZ perpendicularis KM . Triangula LKM , $K\xi X$, rectangula ad K & M sunt similia ob angulos α quales $K\xi X$, LKM ; & ideo ut KM ad KL , ita $K\xi$ ad $X\xi$, & ideo $KL \times K\xi = KM \times X\xi$, atque γE est α qualis rectae $X\xi$, quod sic probo; XY est ad XK vel AC , ut XK ad $X\xi$, sed ob Hyperbolam, $X\gamma$ est ad AC ut AC ad γE , sunt ergo α quales γE , $X\xi$, & ideo rectangulum ex KL in $K\xi$ α quale est rectangulo ex KM in $E\gamma$ nempe EZ , atque rectangulum ex KL in $K\xi$ majus est rectangulo cylindrico inscripto portioni super KO , quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe $K\xi$ basem habet majorem (est enim recta KL major quam curva KO) & ideo rectangulum EZ majus est rectangulo cylindrico inscripto portioni super KO ; eodem modo probatur rectangulum GY majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super $O\alpha$, & rectangulum 2γ majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super $6K$; & proinde rectilineum $72DEHGRY$ majus est omnibus rectangulis cylindricis inscriptis simul sumptis, & ideo spatium Hyperbolicum $2PY7$ eisdem rectangulis cylindricis multo majus est. In puncto O ducatur tangens $3OS$; demonstratur ut antea rectangulum OS vel OI in $O3$ α quale esse rectangulo GY seu FZ , atque rectangulum $O3$ in OI minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super KO , quoniam eandem cum illo habens altitudinem, basem habet minorem (est enim recta OI minor quam curva KO) & proinde rectangulum FZ minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super KO ; eodem modo probatur rectangulum NY minus esse rectangulo cylindrico portioni super $O\omega$ circumscripto, & rectangulum $B\gamma$ minus esse rectangulo cylindrico portioni super $6K$ circumscripto; & ideo rectilineum $7BEFGN.PY$ minus est omnibus rectangulis cylindricis circumscriptis simul sumptis; & ideo spatium hyperbolicum $2PY7$ eisdem rectangulis cylindricis multo minus est. Quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectangula cylindrica circumscripta simul sumpta & rectangula cylindrica inscripta simul sumpta, intermediae autem spatium hyperbolicum $2PY7$ & superficies cylindrica super curva 6ω , & ideo differentia intermediae minor est quam differentia maximae & minimae; at differentia maximae & minimae ex constructione minor est quam α , & ideo differentia intermediae nempe spatii Hyperbolici & superficiei cylindricae est multo minor quam α , quod est absurdum, ponitur enim α ; non igitur differunt quantitates intermediae, & ideo α quales sunt, quod demonstrandum erat.

Quod

Quod si Superficies cylindrica producatursque ad terminum quadrantis A : dico adhuc illam esse æqualem spatio hyperbolico correspondenti $CPYA$; si non sunt æquales, sit superficies cylindrica super $A\omega$ major spatio hyperbolico $CPYA$, & abscindatur plano $B67$ rectæ AX normali portio superficiei cylindricæ, ita ut relicta nempe superficies cylindrica super curva 6ω sit æqualis spatio hyperbolico $CPYA$, atque superficies super 6ω æqualis est spatio hyperbolico $2PY7$, ex hæcenus demonstratis; spatia igitur hyperbolica $CPYA$, $2PY7$, sunt æqualia, quod est absurdum; superficies ergo cylindrica super $A\omega$ non est major spatio hyperbolico $CDYA$; sit (si fieri potest) minor & à spatio hyperbolico $CPYA$ auferatur rectâ 27 ipsi CA parallelâ spatium $C27A$, ita ut relictum $2PY7$ fiat æquale superficiei cylindricæ super $A\omega$, atque spatium hyperbolicum $2PY7$ æquale est superficiei cylindricæ super 6ω ; & ideo superficies cylindricæ super 6ω & super $A\omega$ inter se sunt æquales, quod est absurdum; & ideo superficies cylindrica super $A\omega$ non est minor spatio hyperbolico $CPYA$, sed (ut ante demonstratum est) nec est major; restat igitur, ut illi sit æqualis, quod demonstrandum erat.

CONSECTARIUM.

Hinc manifestum est superficiem cylindricam ex tangentium summa conflata (v. g. super curva $A\omega$) esse secantem artificialem ejusdem arcus $A\omega$, posito radio loco unitatis; nam (ut demonstratur in nostra Circuli & Hyp. Quadr.) posita CA seu radio loco unitatis, erit spatium hyperbolicum $ACPY$ Logarithmus rectæ YP secantis arcus $A\omega$.

PROP. V. THEOREMA.

Fig. 6.

Sit circuli quadrans $QC\omega$ bifariam divisus in puncto D . Sit arcus DM minor quam $D\omega$, super quo imaginetur superficies Cylindrici rectæ talis naturæ, ut (sumpto in arcu DM quolibet puncto G) perpendicularis ad planum $QC\omega$ ex puncto G ad summam superficiem cylindricæ excitata semper fiat æqualis secanti arcus GC . In radium QC demittantur rectæ perpendiculares DV , MR , quæ producantur in 2 & 3 ; fiatque mixtilineum $V23R$ talis naturæ, ut (ductâ rectâ quâcunque $GT5$ rectæ DV parallelâ) tangentes arcuum GC , $G\omega$, simul, nempe

nempe recta AO , æquales sint rectæ $T\gamma$. Dico mixtilineum $V_2\beta R$ æquale esse superficiæ cylindricæ super curva DM : si prædictæ Figuræ non sint æquales, sit inter illas differentia α , & dividatur recta VR in tot partes æquales planis rectæ VR perpendicularibus, & mixtilineum $V_2\beta R$ in rectis $T\gamma$, $S\delta$, secantibus & superficiem cylindricam in diversas portiones dividantibus, ut omnia rectangula cylindrica simul, hisce portionibus inscripta, differant ab omnibus rectangulis cylindricis simul, eisdem circumscriptis minore quantitate quam α ; hoc enim absque dubio fieri potest ab indefinita divisione rectæ VR . Compleantur rectangula V_4 , V_5 , T_7 , T_8 , S_9 , S_β , & ducatur in puncto G tangens ΔGO , sitque in rectam LS perpendicularis GK . Triangula IGK , $O\Delta Q$, sunt similia, & ideo ut GK vel VT ad GI vel GE , ita $Q\Delta$ ad AO seu $T\gamma$, & proinde rectangulum VT in $T\gamma$ nempe V_5 æquale est rectangulo EG in AQ , atque rectangulum EG in AQ minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GD , quoniam eandem cum illo habens altitudinem nempe AQ , basem habet minorem; & ideo rectangulum V_5 minus est rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GD ; eodem modo demonstratur rectangulum T_8 minus esse rectangulo cylindrico circumscripto portioni super GI , & rectangulum S_β minus esse rectangulo cylindrico circumscripto portioni super LM ; & ideo rectilineum $V_3\gamma\delta\beta R$ minus est omnibus rectangulis cylindricis circumscriptis simul sumptis, & igitur mixtilineum $V_2\beta R$ eisdem rectangulis cylindricis multo minus est. Ob similia triangula DFH , BPQ ; DH vel VT est ad DF ut BQ ad BP vel V_2 , & ideo rectangulum V_4 æquale est rectangulo DF in BQ ; at rectangulum DF in BQ majus est rectangulo cylindrico portioni super DG inscripto, quoniam eandem cum illo habens altitudinem BQ , basem habet majorem; & ideo rectangulum V_4 majus est rectangulo cylindrico inscripto portioni super DG ; eodem modo probatur rectangulum T_7 majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super GL , & rectangulum S_9 majus esse rectangulo cylindrico inscripto portioni super LM , & ideo rectilineum $V_2\gamma\delta\beta R$ majus est omnibus rectangulis cylindricis inscriptis simul sumptis; est ergo mixtilineum $V_2\beta R$ eisdem rectangulis cylindricis multo majus. Quatuor igitur sunt quantitates, quarum maxima & minima sunt rectangula cylindrica circumscripta simul, & rectangula cylindrica inscripta simul; intermedia autem mixtilineum $VT\beta R$ & superficies cylindrica super curva DM , & ideo differentia maximæ & minimæ est major differentiâ intermediarum, differentia autem maximæ & minimæ ex constructione est minor quam α , & ideo differentia intermediarum est multo minor quam α , quod

quod est absurdum, ponitur enim α ; non igitur differunt quantitates intermediae & ideo aequales sunt, quod, &c. Quod si arcus DM sumeretur versus C, adhuc staret Prop. Demonstratio autem esset paulo diversa, quae tamen nullo negotio ex priore colligeretur. Si punctum M in ipso C caderet, verum etiam esset *Theorema*, sed negativè per duas positiones demonstrandum, sicut in fine antecedentis.

Sit mixtilineum VXR talis naturae, ut (ducta recta quacunque GTY rectae DX parallela) recta TY semper aequalis fiat tangenti GO; manifestum est (ex Geomet. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum VXR aequale esse superficiei trunci cylindrici recti resectae a plano basem seminormaliter secante in recta PQ, atque (ex Geom. part. univer. Prop. 3.) evidens est eandem trunci superficiem aequalem esse rectangulo NG in CQ, & ideo mixtilineum VXR eidem rectangulo est aequale. Ex praedictis evidens est mixtilineum XZ talis esse naturae ut YZ semper sit aequalis tangenti GA; & proinde mixtilineum XZ una cum portione quadrantis DVRM aequale est spatio conchoidali resecto à rectis DV, MR, cujus conchoidis vertex est C, norma PQ, polus π , $CQ = Q\pi$: ex hac Prop. & hujus 2 evidens est sequens consecrarium spatio conchoidali quadrando satis expeditum.

CONSECTARIUM.

SI in praedicta conchoide accipiatur spatium contentum à curva conchoidali & rectis CT, TG; erit praedictum spatium aequale duplo spatii hyperbolici (cujus asymptotae QA, QP, semiaxis QC) contenti à curva hyperbolica una asymptotà & rectis QC, QA — GA, alteri asymptotae parallelis, una cum semifragmento circulari CGT dempto rectangulo QC in GT. Aliarum conchoideon spatia (nempe quando vertex & polus non aequaliter distant à normali) possunt mensurari per Analogiam à Wallisio in Epist. Com. pag. 171 demonstratam.

PROP. VI. THEOREMA.

SIT cissois KLM cujus asymptoton GM, semicirculus GDK. Fig. 7.
Diametro GK sit normalis DIL, & jungantur rectae DK, GL;
Dico spatium cissoïdale GKL triplum esse segmenti circularis DNK.
Ducatur curva KCB talis naturae, ut (ducta ad libitum à puncto G
recta

recta GDA , quæ tangenti occurrat in A) CDI perpendicularis rectæ GK , fiat æqualis rectæ KA . Recta DF semicirculum tangat in puncto D , & ideo æquales sunt rectæ FD , FK ; cùmque angulus KDA sit rectus, patet FA , FD , esse æquales; cùmque CI semper sit æqualis duplæ ipsius DF , manifestum est (ex Geom. part. univer. Prop. 4.) mixtilineum CKI esse duplum superficiei trunci cylindrici recti super curva DNK resectæ a plano basem seminormaliter secante in recta KA ; atque eadem superficies trunci æqualis est rectangulo ex curva DNK in radium KH ablato rectangulo ex DI in HK (ut satis patet versatis in superficierum studio) hoc est duplo segmenti circularis DNK ; est igitur mixtilineum CKI quadruplum segmenti circularis DNK . Ut DI ad IK ita est IK vel DE ad EA vel CD , & proinde æquales sunt rectæ CD , IL , cùmque hoc semper fiat, patet spatium cissoïdale IKL æquale esse mixtilineo $DNKC$, & idem utrinque addendo nempe semisegmentum circulare $DIKN$, mixtilineum CKI , seu quadruplum segmenti circularis DNK , æquale est mixtilineo $DNKL$, & utrinque auferendo segmentum circulare DNK , triplum segmenti circularis DNK æquale est mixtilineo $DOKL$, seu (ob æqualitatem triangulorum DKI , GIL) ipsi spatii cissoïdali proposito GKL , quod demonstrandum erat.

Hic supponitur arcus DNK quadrante minor, quod si quadrante esset major, nullo negotio variari potest demonstratio ut illi inserviat: at KND existente semicircumferentiâ, multò facilior esset demonstratio, nempe quòd spatium cissoïdale infinitè extensum æquetur semicirculi triplo.

Methodus



Methodus Componendi
TABULAS TANGENTIUM
 &
SECANTIUM ARTIFICIALIUM
 Ex
TABULIS TANGENTIUM
 &
SECANTIUM NATURALIUM
 Exactissimè & minimo cum Labore.

Sit AI arcus quadrantis in lineam rectam extensus, sitque Figura AHI conflata ex tangentibus naturalibus singulorum arcuum a puncto A , in debitis suis punctis, rectis AI normaliter insistentibus: sit AP pars minima, in cui æquales dividitur quadrans, nempe $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{100}$ gradus, sintque illi æquales PO , ON , NM , &c. & ducantur rectæ AI perpendiculares PB , OC , ND , ME , &c. manifestum est ex consecutario 4 huius, Figuram ABP esse secantem artificialem arcus AP item Figuram ACO esse secantem artificialem arcus AO , (positâ cyphrâ loco radii artificialis) &c. manifestum est rectangula BO , CN , DM , &c. inveniri ex multiplicatione minimæ partis quadrantis AP in singulas tangentes naturales; at in mensurandis Figuris ABP , BCX , CDV paulo maior est difficultas; primo igitur si tangentes conveniant in differentiis primis, non differunt lineæ AB , BC , CD , &c. à rectis, & ideo Figuræ ABP , BCX , CDV , &c. erunt triangula rectangula, & proinde e. g. $GHQ = \frac{HQ \times QG}{2}$: quod si differentiæ secundæ fuerint æquales,

erunt dictæ Figuræ portiones trilineorum quadraticorum, e. g. erit GHQ portio trilinei quadratici, cuius axi HQ est parallela, differentiæ illæ inter se æquales sint Z ; & proinde erit $GHQ =$
 E H

$\frac{H Q \times G Q}{2} - \frac{Z \times G Q}{12}$: si autem differentiae tertiae fuerint aequa-

les, erunt dictae Figuræ portiones trilineorum cubicorum, eritque e. g.

$$G H Q = \frac{H Q \times G Q}{2} - \sqrt[4]{\left(\frac{H Q \times Z \times G Q^2}{72} - \frac{Z^2 \times G Q^2}{1728} \right)}:$$

quando differentiae quartae sunt aequales, erunt dictae Figuræ portiones trilineorum Q - quadraticorum, & differentiae quartae erunt aequales 24^{to} plo Q - quadrati ipsius G Q diviso per cubum lateris recti, item quando differentiae quintae sunt aequales, erunt dictae Figuræ portiones trilineorum surfolidorum, & differentiae quintae erunt aequales 120^{to} plo surfolidi ipsius G Q diviso per Q - quadratum lateris recti, & sic in infinitum. Quæ hic diximus de compositione secantium artificialium

ex tangentibus naturalibus eodem modo intelligi velim de compositione tangentium artificialium ex secantibus naturalibus secundum hujus tertiam. Animadvertendum tangentes & secantes artificiales supra computari, posito 0 Logarithmo unitatis, 1000000000000 radio, & 2302585092994045624017870 Logarithmo denarii: facilius autem (nimirum solâ additione) posito $\frac{1}{10}$ grad. = G Q = A P = 1, computabimus tangentes & secantes artificiales ad 7723774451097819 denarii

Logarithmum; nam hac ratione $\frac{H Q \times G Q}{2} = G H Q = \frac{H Q}{2}$, item

$$\frac{H Q \times G Q}{2} - \frac{Z \times G Q}{12} = G H Q = \frac{H Q}{2} - \frac{Z}{12}, \text{ item}$$

$$\frac{H Q \times G Q}{2} - \sqrt[4]{\left(\frac{H Q \times Z \times G Q^2}{72} - \frac{Z^2 \times G Q^2}{1728} \right)} = H G Q =$$

$$\frac{H Q}{2} - \sqrt[4]{\left(\frac{H Q \times Z}{72} - \frac{Z^2}{1728} \right)}: \& \text{ tandem unicâ solâ divisione}$$

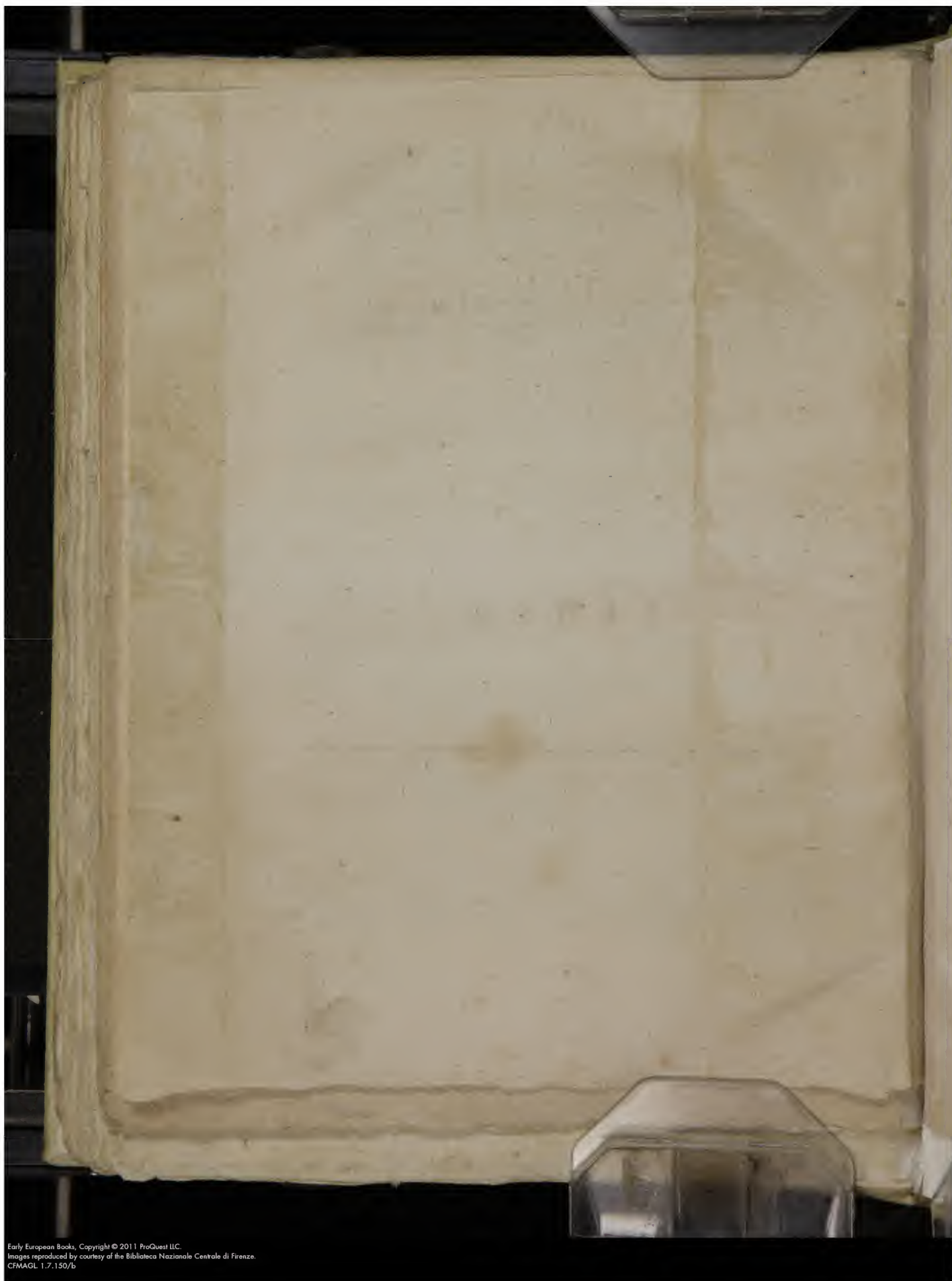
invenimus tangentes & secantes artificiales ad Logarithmum denarii 10000000000000, posito semper radio unitatis loco, quæ sunt differentiae tangentium & secantium artificialium in tabula ab ipso radio artificiali, & proinde divisoris multiplices, ad facilitandam operationem, in tabella subsidiaria hic reponimus. Quod si $\frac{1}{10}$ grad. = G Q, tangentes & secantes artificiales debentur Logarithmo denarii 13192840779829703, cujus etiam multiplices in subiecta tabella notantur. Quod, si quis velit hos numeros potius representare radium artificialem quam denarii Logarithmum, addatur cyphra & habebit intentum. Notandum hos numeros convenire radio naturali 1000000000000, hinc enim patebit numerus notarum in adscriptis artificialibus.

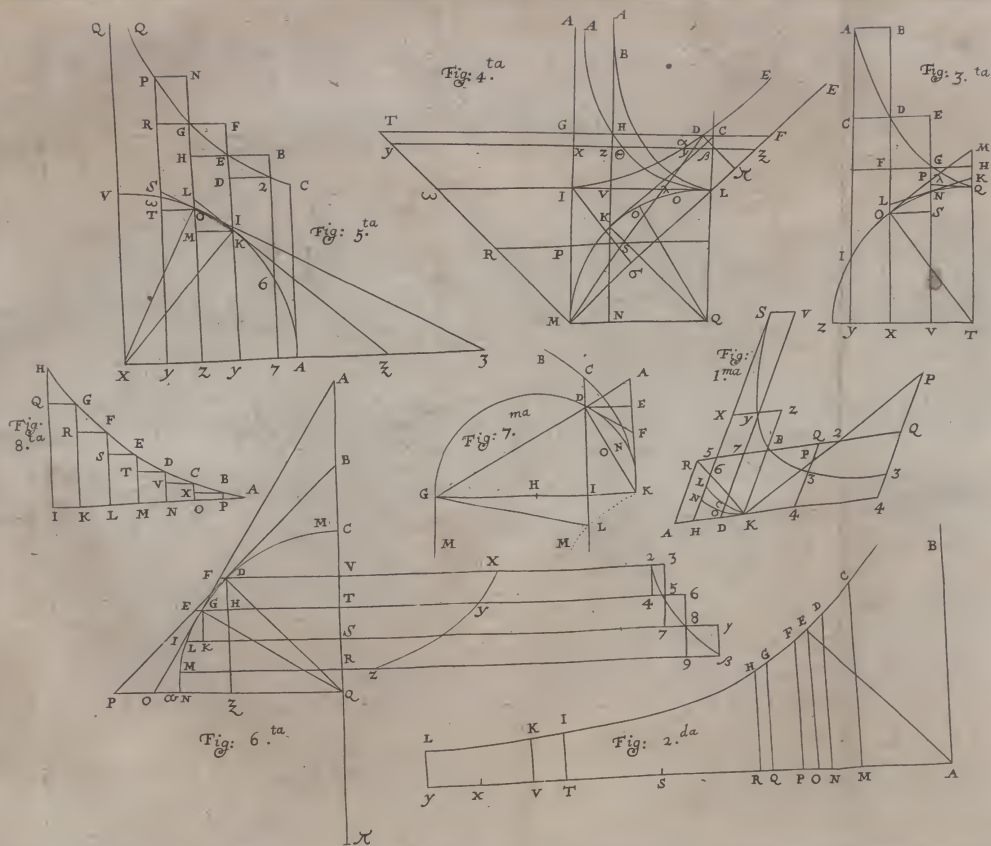
(27)

169

1	7915704467897819	13192840779829703
2	15831408935795638	26385681559659406
3	23747113403693457	39578522339489109
4	31662817871591276	52771363119318812
5	39578522339489095	65964203899148515
6	47494326807386914	79157044678978218
7	55409931275284733	92349885458807921
8	63325635743182552	105542726238637624
9	71241340211080371	118735567018467327

F I N I S.







906



c = 005644452
d = 005644453

